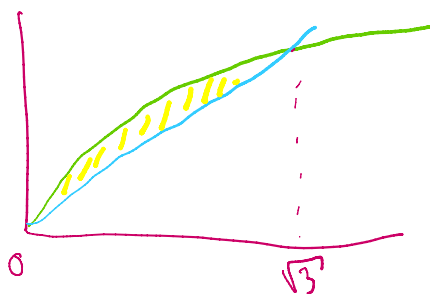


(1) Řešíme rovnici $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi x}{\sqrt{3}}$ pro $x \geq 0$. Dosazením ověříme, že $x=0$ a $x=\sqrt{3}$ jsou všemi!

$$\left[\operatorname{arctg} 0 = 0 = 0 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right]$$

Dále $\operatorname{arctg} x - \frac{\pi x}{\sqrt{3}}$ je ryze konkávní na $[0, \infty)$, tedy 0 a $\sqrt{3}$ jsou jediná řešení!

[ryze konkávní funkce nabývá každé hodnoty nejvýše dvakrát]



Počítáme tedy

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x - \frac{\pi x}{\sqrt{3}} dx &= \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx - \frac{\pi}{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}} x dx = \left[x \operatorname{arctg} x \right]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2} dx - \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - \left[\frac{1}{2} \log(1+x^2) \right]_0^{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \log 4 = \boxed{\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \log 2} \end{aligned}$$

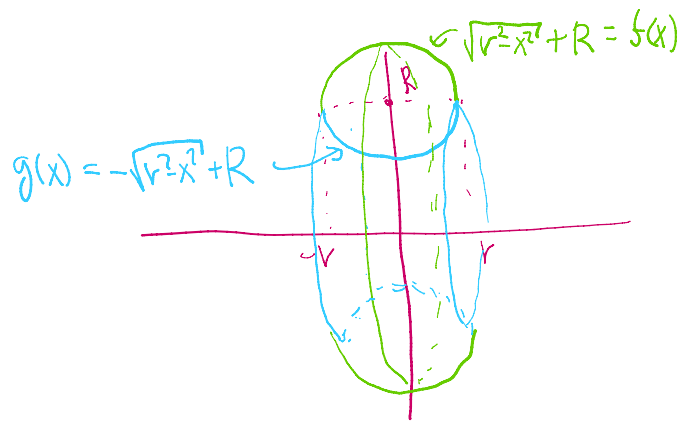
$z = 1+x^2$

(2) $f(x) = \cosh x$, $f'(x) = \sinh x$ $x \in (-1, 1)$

Počítáme integrál

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{[f'(x)]^2 + 1} dx &= \int_{-1}^1 \sqrt{\sinh^2 x + 1} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\cosh^2 x} dx \\ &= \int_{-1}^1 \cosh x dx = \left[\sinh x \right]_{-1}^1 = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]_{-1}^1 = \boxed{e - \frac{1}{e}} \end{aligned}$$

(3)



Objem - podle vzorečku (1. vzoreček v 2. části) dostáváme integrál

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-r}^r f^2 - g^2 = \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2} + R)^2 - (-\sqrt{r^2 - x^2} + R)^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} + R^2 - (r^2 - x^2 - 2R\sqrt{r^2 - x^2} + R^2)) dx \\
 &= \pi \int_{-r}^r 4R\sqrt{r^2 - x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x = r \sin t \quad -r \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ dx = r \cos t dt \quad r \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = 4\pi R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \cdot r \cos t dt \\
 &= 4\pi R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cdot |\cos^2 t| dt = 4\pi R r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \boxed{2\pi^2 R r^2}
 \end{aligned}$$

Povrch pláště - podle vzorečku (2. vzoreček v části 4)

$$S = 2\pi \int_{-r}^r f \sqrt{1 + (f')^2} + 2\pi \int_{-r}^r g \sqrt{1 + (g')^2} = 2\pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2} + R) - \sqrt{r^2 - x^2} + R \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$

$\uparrow$ vnější část pláště $\uparrow$ vnitřní část pláště $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

$$\sqrt{1 + (f')^2} = \sqrt{1 + (g')^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$= 2\pi \int_{-r}^r \frac{2Rr}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = \left[\begin{array}{l} x = rt \quad -r \rightarrow -1 \\ dt = r dt \quad r \rightarrow 1 \end{array} \right] = 4\pi R r^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{r^2 - r^2 t^2}} dt = 4\pi R r \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt$$

$$= 4\pi R r \left[\arcsin t \right]_{-1}^1 = 4\pi^2 R r$$

— $\frac{1}{2} \frac{dL}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dL}{dt}$

(4) viz odvození vzorečka př. (6)